

О ВЛИЯНИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ — ДУФФИНГА

С.П. Жогаль¹, С.И. Жогаль², Р.И. Коржик¹,

¹ Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
zhogal@gsu.by

² Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

Система связанных автоколебательных осцилляторов ван дер Поля — Дуффинга является одной из базовых моделей теории колебаний, иллюстрирующей явление синхронизации и сопутствующие эффекты [1]. При исследовании дополнительно вводится запаздывание по времени δ_1 и δ_2 в первый и второй осцилляторы соответственно. Математическая модель системы имеет вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda_1 - x^2(t - \delta_1))\dot{x}(t - \delta_1) + \beta x^3(t - \delta_1) + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \varepsilon(x - y) + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - y^2(t - \delta_2))\dot{y}(t - \delta_2) + \beta y^3(t - \delta_2) + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \varepsilon(y - x) + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

После последовательности преобразований при допущении, что в нулевом приближении коэффициенты связи μ , ε и параметры неизохронности β и неидентичности $\rho = (\lambda_1 - \lambda_2)/2$ малы по сравнению с единицей, получим систему уравнений для амплитуд r_1 и r_2 колебаний парциальных звеньев системы

$$\dot{r}_1 = r_1 \cos \delta_1 - r_1^3 \cos \delta_1, \quad \dot{r}_2 = r_2 \cos \delta_2 - r_2^3 \cos \delta_2. \quad (2)$$

Этим уравнениям отвечает установившееся движение по одинаковым орбитам радиуса $r_1 = r_2 = 1$. Перейдем теперь к возмущенным движениям. В первом приближении можно положить $r_1 = 1 + \tilde{r}_1$ и $r_2 = 1 + \tilde{r}_2$, где тильдой отмечены малые возмущения соответствующих переменных. Подставим сначала эти соотношения в уравнения амплитуд системы с ненулевыми коэффициентами. Пренебрегая членами высшего порядка, получим

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{r}}_1 &= -2\tilde{r}_1 \cos \delta_1 + \rho \cos \delta_1 + 3\beta \sin \delta_1 + \varepsilon \sin \varphi + \mu(\cos \varphi - 1), \\ \dot{\tilde{r}}_2 &= -2\tilde{r}_2 \cos \delta_2 - \rho \cos \delta_2 + 3\beta \sin \delta_2 - \varepsilon \sin \varphi + \mu(\cos \varphi - 1),\end{aligned}\quad (3)$$

где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность фаз парциальных звеньев системы. Обратим внимание, что возмущения амплитуд сильно демпфированы, поэтому их значения очень быстро выходят на стационарный уровень. Этот факт позволяет вычислить возмущения, определяющие стационарные орбиты осцилляторов:

$$\begin{aligned}\tilde{r}_1 &= \frac{\mu(\cos \varphi - 1) + 3\beta \sin \delta_1 + \varepsilon \sin \varphi + \rho \cos \delta_1}{2 \cos \delta_1}, \\ \tilde{r}_2 &= \frac{\mu(\cos \varphi - 1) + 3\beta \sin \delta_2 - \varepsilon \sin \varphi - \rho \cos \delta_2}{2 \cos \delta_2}.\end{aligned}\quad (4)$$

Подставим теперь выражения $r_1 = 1 + \tilde{r}_1$ и $r_2 = 1 + \tilde{r}_2$ в фазовое уравнение системы

$$\dot{\varphi} = \tilde{r}_2 \sin \delta_2 - \tilde{r}_1 \sin \delta_1 + \rho \sin \delta_2 + \rho \sin \delta_1 + 2\varepsilon(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) \cos \varphi + 2\mu \sin \varphi + \Delta, \quad (5)$$

с учетом соотношений (4) получим

$$\dot{\varphi} = \frac{\mu(\cos \varphi - 1) + 3\beta \sin \delta_2 - \varepsilon \sin \varphi - \rho \cos \delta_2 + \cos \delta_2}{\cos \delta_2} \sin \delta_2 -$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\mu(\cos \varphi - 1) + 3\beta \sin \delta_1 + \varepsilon \sin \varphi + \rho \cos \delta_1 + \cos \delta_1}{\cos \delta_1} \sin \delta_1 - ((1 - \rho) \sin \delta_2 - (1 + \rho) \sin \delta_1) + \\ & + 3\beta(3\beta(\sin \delta_2 - \sin \delta_1) - 2\varepsilon \sin \varphi - \rho(\cos \delta_2 + \cos \delta_1) + \cos \delta_2 - \cos \delta_1) + 2\varepsilon \cos \varphi \times \\ & \times \left(\frac{\mu(\cos \varphi - 1)(\cos \delta_1 - \cos \delta_2) + 3\beta(\sin \delta_2 \cos \delta_1 - \sin \delta_1 \cos \delta_2)}{\mu(\cos \varphi - 1)(\cos \delta_2 + \cos \delta_1) + \varepsilon \sin \varphi(\cos \delta_2 - \cos \delta_1) + 2\rho \cos \delta_1 \cos \delta_2} - \right. \\ & \left. - \frac{\varepsilon \sin \varphi(\cos \delta_2 + \cos \delta_1) - 2\rho \cos \delta_1 \cos \delta_2}{\mu(\cos \varphi - 1)(\cos \delta_2 + \cos \delta_1) + \varepsilon \sin \varphi(\cos \delta_2 - \cos \delta_1) + 2\rho \cos \delta_1 \cos \delta_2} \right) - 2\mu \sin \varphi + \Delta. \end{aligned}$$

Это и есть искомое фазовое уравнение. Его анализ позволяет выяснить характер динамики относительной фазы слабо связанных осцилляторов в зависимости от всех существенных факторов: диссипативной связи, инерционной связи, параметров неизохронности, неидентичности и запаздываний.

Литература

1. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. *Нелинейные колебания*. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
2. Кузнецов А. П., Станкевич Н. В., Тюрюкина Л. В. *Связанные осцилляторы ван дер Поля и ван дер Поля — Дуффинга: фазовая динамика и компьютерное моделирование* // Изв. вузов «Прикладная нелинейная динамика». 2008. № 4. Т. 16. С. 101–136.

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ — ПУССЕНА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.И. Кашпар

Институт технологии металлов НАН Беларуси, Могилев, Беларусь
alex.kashpar@tut.by

Исследуется задача [1–3] :

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{X}}\mathbf{B}(t) + \lambda(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{B}_1(t)) + \lambda(\mathbf{A}_2(t)\dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{X}}\mathbf{B}_2(t)) + \mathbf{F}(t), \quad (1)$$

$$\mathbf{X}(0, \lambda) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{X}(\omega, \lambda) = \mathbf{N}, \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad (2)$$

где $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{A}_i(t)$, $\mathbf{B}_i(t)$ ($i = 1, 2$) — матрицы класса $\mathbb{C}[0, \omega]$ соответствующих размерностей; \mathbf{M} , \mathbf{N} — заданные вещественные матрицы; $\omega > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

В данной работе, являющейся продолжением и развитием [1–3], разработан алгоритм построения решения задачи (1), (2) на основе метода [4, гл. I] и метода Пуанкаре (малого параметра) применительно к соответствующей эквивалентной интегральной задаче

$$\mathbf{X} = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y} = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}),$$

где

$$\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) = \int_0^t \mathbf{U}(\tau)(\Phi^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M}))\mathbf{V}(\tau) d\tau, \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) = \mathbf{U}(t)(\Phi^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M}))\mathbf{V}(t);$$

\mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 , Φ — интегральные операторы [5], конструируемые по методике [4]; $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ — фундаментальные матрицы уравнений $\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}$, $\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{V}\mathbf{B}(t)$.